Approximations d'intégrales

Explications :

Le but de ce TD est d'approcher, (ici par 2 méthodes,) le résultat du calcul d'une intégrale $\int_a^b f$ pour une fonction f continue sur $[a,b]$.

Méthode des rectangles

Une des méthodes les plus simples est celle issue de la technique des sommes de Riemann. En effet, on rappelle que l'on sait que, pour toute fonction f continue sur $[a,b]$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f.$$

Ainsi, en subdivisant l'intervalle $[a,b]$ en n intervalles de longueurs égales délimitées par des valeurs $[a_0,a_1,\dots,a_n]$, où

$$a=a_0<a_1<\ldots<a_n=b, \quad a_k=a+k\frac{b-a}{n} \ \forall k=0,\dots,n$$

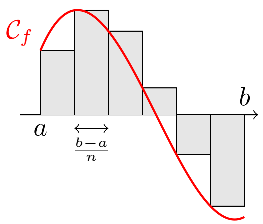
et

$$a_{i+1}-a_i=\frac{b-a}{n} \quad \forall i=0,\dots n-1. \quad (\text{valeur appelée "}\textit{le pas}\text{"})$$

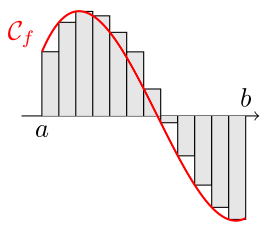
La valeur $\frac{b-a}{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)=\frac{b-a}{n}f(a_k)$ est l'aire d'un rectangle de base de largeur $\frac{b-a}{n}$ et de hauteur $f(a_k)$ que l'on peut illustrer sur la courbe $\mathcal{C}_f$ de f comme ci-dessous :

Rectangles "à gauche" qui illustrent $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)=\int_a^b f$:

Avec $n=6$

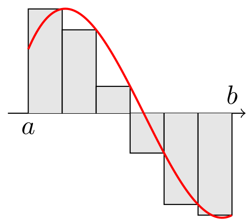


Avec $n=12$

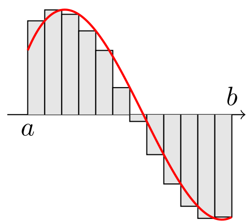


Rectangles "à droite" qui illustrent $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)=\int_a^b f$:

Avec $n=6$



Avec $n=12$



Dans les deux cas, on observe bien que plus n est grand, plus l'aire totale des rectangles s'approche de l'aire sous la courbe, donc de $\int_a^b f$.

Exercice 1:

1. Construire un programme Python `rectangle_gauche(f,a,b,n)` qui renvoie la valeur de $\frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$.
2. Avec la fonction $f: x\mapsto \cos x$ sur l'intervalle $[a,b]=[0,\pi]$, dessiner la courbe d'abscisse n et de valeur `Rn=rectangle_gauche(f,a,b,n)`. Observez qu'elle tend bien vers $\int_a^b f=0$.

Exercice 2: Vitesse de convergence

Soit f toujours une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

On pose $M=\max\limits_{[a,b]}|f'|$ et on note $R_n=\frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$. On admet que de manière générale

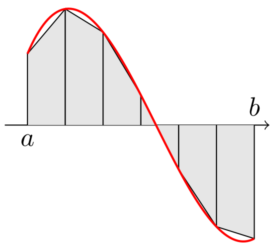
$$\left|\int_a^b f - R_n\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2n}M$$

1. Déterminer la valeur de M pour la fonction f de la question 2 de l'exercice précédent 1 toujours sur l'intervalle $[a,b]=[0,\pi]$
2. Avec la même fonction et le même interalle $[a,b]$, dessiner maintenant le graphique contenant la courbe de la fonction $n\mapsto\frac{(b-a)^2}{2n}M$ ainsi que la courbe

de $\left|\int_a^b f - R_n\right|$ et observer en effet la majoration de la vitesse de convergence en $\frac{1}{n}$.

Méthode des trapèzes

La méthode dite des "trapèzes" tire son nom du fait qu'au lieu d'approcher par des rectangles, on utilise les trapèzes délimités **à gauche et à droite** par les valeurs de f (et non plus seulement à gauche ou à droite). cf graphe ci-dessous :



Comme dans la méthode des rectangles, on découpe l'intervalle $[a,b]$ en n intervalles de même longueur $p = \frac{b-a}{n}$ (appelée le *pas*)
La subdivison ainsi obtenue est notée $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ où

$$a_0 = a,\ a_1 = a+p,\ a_2 = a+2p,\ \dots,\ b = a_n.$$

On pourrait démontrer que tout comme dans la méthode des rectangles, l'aire totale des trapèzes tend vers $\int_a^b f$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 3:

1. En posant $p = \frac{b-a}{n}$ le pas de la subdivision, montrer que l'aire du trapèze de base $[a_i; a_{i+1}]$ est

$$\alpha_i = p \cdot \frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2}$$

2. En déduire un programme Python `trapeze(f,a,b,n)` qui renvoie la valeur $T_n = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i$ de la somme des aires des trapèzes entre les abscisses a et b pour une subdivision en n intervalles.

3. Comparaison avec la méthode des rectangles :
Avec la fonction $f : x \mapsto e^x$ sur l'intervalle $[a,b] = [0,3]$, dessiner les courbes d'abscisse n et de valeurs resepctives `rectangle_gauche(f,a,b,n)` et `trapeze(f,a,b,n)` et observer les vitesses de convergence des sommes R_n et T_n vers $\displaystyle\int_a^b f = e^3 - 1$.
Laquelle converge le plus vite vers l'intégrale et pourquoi ?

Pour information, la majoration de la différence dans le cas de la méthode des trapèzes est donnée, pour tout fonction $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$ par :

$$\left|\int_a^b f - T_n\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{24n^2} M$$

où $M = \max\limits_{[a,b]} |f''|$. On observe ici une convergence en $\frac{1}{n^2}$, ce qui est plus rapide que la convergence en $\frac{1}{n}$ observée dans la méthode des rectangles.